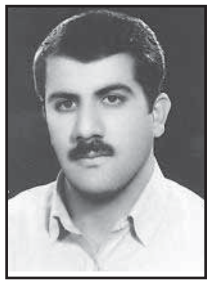
تعمیم یک مسئله در هندسه



مرتضی بیات*
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد زنجان

زهرا خاتمی
دبیر ریاضی
ناحیه یک زنجان

اشاره

درس هندسه به‌خاطر شهودی بودن مفاهیم آن، در مقایسه با درس‌های دیگر ریاضی، از جایگاه خاصی در آموزش ریاضی برخوردار است؛ از جمله در کشف بسیاری از ویژگی‌های هندسی و حتی تعمیم بسیاری از ویژگی‌های پنهان شکل‌های هندسی کارامد است. از طرف دیگر، بسیاری از مفاهیم جبری، ترکیبیاتی و غیره را می‌توان به کمک اشکال هندسی تبیین کرد و بسیاری از خواص جبری و ترکیبیاتی را به کمک اشکال هندسی حدس زد و در بعضی موارد، اثباتی هندسی برای آن‌ها ارائه داد.

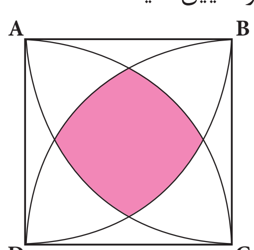
در مقالهٔ «یک مسئله و چند راه‌حل» به قلم *مهدی قربانی* که در «رشد آموزش ریاضی» (زمستان ۱۳۸۳) به چاپ رسیده، یک مسئلهٔ هندسی مربوط به تعیین مساحت ناحیهٔ داخل یک مربع به پنج روش حل شده که در تمام روش‌ها، تقارن موجود در شکل مورد استفاده قرار گرفته است. با این تفاوت که در سه راه‌حل اول از روش هندسی، در راه‌حل چهارم از روش جبری حل دستگاه سه معادله و سه مجهول، و در راه‌حل پنجم از مبحث انتگرال در حسابان استفاده شده است.

در اینجا ما به کمک روش ساده‌ای این مسئله را حل می‌کنیم. این روش ما را قادر می‌سازد که این مسئله را به هر چندضلعی منتظم، و نه فقط مربع، تعمیم دهیم. تعمیم این مسئله برای هر nضلعی منتظم، رفتار غیرقابل پیش‌بینی برای حالت‌های n=۳ و n=۶ را روشن می‌سازد. چنانچه برای n=۳، مساحت ناحیهٔ موردنظر بیش از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است و برای n=۶، مساحت ناحیهٔ موردنظر صفر است.

لازم به ذکر است، راه‌حلی که در اینجا داده می‌شود به‌طور اساسی به بررسی حالت n=۳ بستگی دارد.

کلیدواژه‌ها: تقارن، تعمیم مسئلهٔ هندسه، مساحت n ضلعی منتظم

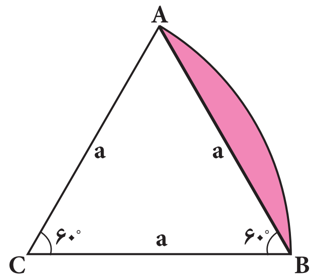
مسئلهٔ ۱. در شکل ۱ چهارضلعی ABCD مربع است. به مرکز هر یک از رأس‌های مربع، ربع دایره‌هایی، به شعاع a، ضلع مربع، رسم شده است. مساحت ناحیهٔ هاشورخورده را تعیین کنید.



شکل ۱

قبل از آنکه به حل این مسئله بپردازیم، به حل مسئله‌ای در مورد مثلث متساوی‌الاضلاع می‌پردازیم. قابل ذکر است که این مسئله یک مسئلهٔ درون مسئله برای حل مسئلهٔ ۱ و نیز حالت nضلعی منتظم خواهد بود.

مسئلهٔ ۲ (مسئلهٔ درون‌مسئله). در شکل ۲، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. به مرکز C کمانی به شعاع a، رسم می‌کنیم. کمان از دو رأس مثلث می‌گذرد. مساحت ناحیهٔ هاشورخورده را تعیین کنید.

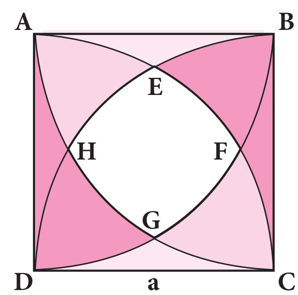


شکل ۲

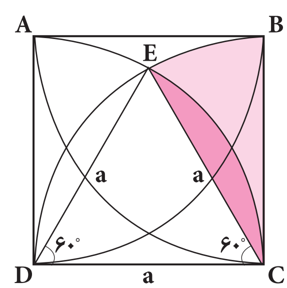
حل: مساحت ناحیه رنگ شده برابر است، با تفاضل مساحت قطاع از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع؛ بنابراین داریم:

$$(\text{مساحت قطعهٔ هاشورخورده}) = a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

حل مسئلهٔ ۱. شکل ۳ را در نظر می‌گیریم. اگر از مساحت مربع ABCD مساحت چهار مثلث منحنی‌الضلع CEB، BHA، AGD و DFC را کم کنیم، مساحت چهارضلعی منحنی‌الضلع EFGH به‌دست می‌آید. بنابراین کافی است تنها مساحت یک مثلث منحنی‌الضلع مانند CEB را به‌دست آوریم. بدین منظور شکل ۴ را در نظر می‌گیریم.



شکل ۳



شکل ۴

چون ED=DC=CE=a، پس مثلث DEC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و زاویه‌های ECD و EDC برابر °۶۰ هستند. برای به‌دست آوردن مساحت مثلث منحنی‌الضلع CEB، از مساحت قطاع ECB مساحت «قطعهٔ نقطه نشان شده» را کم می‌کنیم. حال طبق مسئلهٔ ۲، مساحت قطعهٔ نقطه نشان شده به‌دست می‌آید، بنابراین:

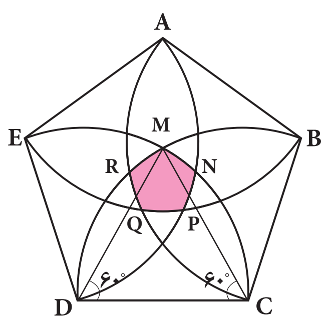
$$(\text{مساحت مثلث منحنی‌الضلع CEB}) = (\text{مساحت قطاع ECB}) - (\text{مساحت قطعهٔ نقطه نشان شده}) = \frac{a^{۲}\pi}{۱۲} - a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

پس:

$$(\text{مساحت ناحیهٔ EFGH}) = a^{۲} - ۴\left[\frac{a^{۲}\pi}{۱۲} - a^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\right]$$

اینک به‌جای چهارضلعی مربع در مسئلهٔ بالا، یک پنج‌ضلعی را در نظر می‌گیریم و به حل مسئلهٔ ۳ می‌پردازیم.

مسئلهٔ ۳. در شکل ۵، ABCDE یک پنج‌ضلعی منتظم است. به مرکز هر یک از رأس‌های پنج‌ضلعی کمانی به شعاع a، اندازهٔ ضلع پنج‌ضلعی، رسم می‌کنیم. مساحت ناحیهٔ هاشورخورده را تعیین کنید.



شکل ۵

حل مسئلهٔ ۳. مشابه حل مسئلهٔ ۱، برای به‌دست آوردن مساحت MNPQR، باید از مساحت پنج‌ضلعی منتظم، مساحت مثلث‌های منحنی‌الضلع AQE، EPD، CMB، BRA و DNC را کم کنیم. در شکل ۵، رأس M را با پاره‌خط‌های MC و MD به‌ترتیب

بسیاری از مفاهیم جبری، ترکیبیاتی و غیره را می‌توان به کمک اشکال هندسی تبیین کرد و بسیاری از خواص جبری و ترکیبیاتی را به کمک اشکال هندسی حدس زد و در بعضی موارد، اثباتی هندسی برای آن‌ها ارائه داد

به C و D وصل می‌کنیم، بنابراین داریم:

(مساحت قطعه MCN) =

(مساحت مثلث MDC)-(مساحت قطاع MDC)

$$=\frac{\pi a^۲}{۶}-\frac{\sqrt{۳}a^۲}{۴}=a^۲\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

هر زاویهٔ یک پنج‌ضلعی (مثلاً $\angle DCB$) برابر $\pi-\frac{۲\pi}{۵}$ است که در آن $\frac{۲\pi}{۵}$ همان زاویهٔ مرکزی مقابل به هر ضلع پنج‌ضلعی در داخل دایرهٔ محاطی است.

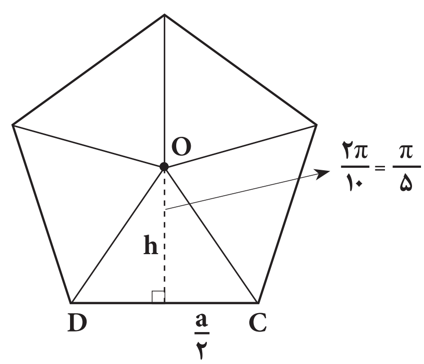
(مساحت مثلث منحنی‌الضلع CMB) =

(مساحت قطاع MCB) - (مساحت قطعهٔ MCN)

$$=\frac{a^۲}{۲}\left[\pi-\frac{۲\pi}{۵}-\frac{\pi}{۳}\right]-a^۲\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$$

اینک برای به‌دست آوردن مساحت ناحیهٔ MNPQR، از مساحت پنج‌ضلعی، پنج برابر مساحت مثلث منحنی‌الضلع CMB را کم می‌کنیم. مساحت یک پنج‌ضلعی به ضلع a از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$(\text{مساحت پنج‌ضلعی ABCDE})=۵\times\frac{a^۲}{۴}\cot(\frac{\pi}{۵})$$



شکل ۶

(زیرا با توجه به شکل ۶ داریم:

$$h=\frac{a}{۲}\cot(\frac{\pi}{۵})$$

و نیز:

$$S(\Delta ODC)=\frac{a}{۲}h=\frac{a^۲}{۴}\cot(\frac{\pi}{۵})$$

اینک خواهیم داشت:

(مساحت ناحیهٔ منحنی‌الضلع MNPQR)

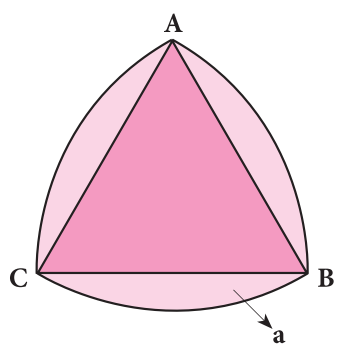
$$=۵\left[\frac{a^۲}{۴}\cot(\frac{\pi}{۵})\right]-۵\left[\frac{a^۲}{۲}\left(\pi-\frac{۲\pi}{۵}-\frac{\pi}{۳}\right)-a^۲\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\right]$$

حال برای n ضلعی منتظم، مشابه آنچه که برای یک پنج‌ضلعی انجام دادیم، تنها با تغییر عدد پنج به n به دستور کلی زیر می‌رسیم (امتحان کنید!):

S=

$$n\left[\frac{a^۲}{۴}\cot(\frac{\pi}{n})\right]-n\left[\frac{a^۲}{۲}\left(\pi-\frac{۲\pi}{n}-\frac{\pi}{۳}\right)-a^۲\left(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)\right]$$

با توجه به دستور به‌دست آمده ملاحظه می‌شود، در حالت n=۶ مقدار عبارت بالا برابر صفر است. یعنی هیچ ناحیهٔ هاشورخورده‌ای به‌وجود نمی‌آید. در ضمن در حالت n=۳، مقدار این عبارت بیش از مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. مطابق شکل ۷ این امر کاملاً قابل توجیه است.



شکل ۷

* Baayyaatt@gmail.com